Особенности преломления звука на границе раздела между чистой водой и водой с пузырьками

В. В. Сарапулова, аспирант

г. Бирск ФГБОУ ВПО Бирский филиал БашГУ

Известно, что выбросы газовых пузырьков в водоеме мешают работе гидролокатора, отражая звуковой импульс и, тем самым, скрывая объекты, находящиеся позади себя. Поэтому, завесу из смеси жидкости с газовыми пузырьками можно использовать в качестве защитного слоя для подводных объектов от воздействия ударных волн, для “маскировки” при гидролокации, а также в качестве подводного звукового канала.

Особенности отражения и преломления звука на границе воды и воды с пузырьками при прямом падении акустической волны изучались в [1-3]. Однако проблема отражения и преломления акустических волн при косом падении на границу раздела до настоящего времени осталась незатронутой как в теоретическом, так и в экспериментальном плане.

В настоящей работе анализируется преломление акустических волн на границе раздела между “чистой” и пузырьковой жидкостью при косом падении. Установлено, что для волн, падающих со стороны чистой воды, при любом угле падения угол преломления меньше прямого угла и, следовательно, она всегда проникает в зону, охваченную пузырьковой водой. В обратной ситуации, когда волна падает со стороны воды с пузырьками на границу раздела, показано, что для низкочастотной зоны ($\omega < \omega^{(R)}$, $\omega^{(R)}$ – собственная частота пузырька) при углах падения $\theta^{(0)}$, превышающих некоторое предельное значение $\theta_*^{(0)}$ ($\theta^{(0)} \geq \theta_*^{(0)}$), зависящее от параметров дисперсной смеси, происходит полное внутреннее отражение.

Запишем согласно [1] линеаризованные уравнения сохранения масс, числа пузырьков, импульсов и изменения давления в пузырьках в предположении однородности

$$\frac{\partial\rho_l}{\partial t}+\rho_{l0}\frac{\partial\upsilon_l}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\rho_g}{\partial t}+\rho_{g0}\frac{\partial\upsilon_g}{\partial x}=0,\ \frac{\partial n}{\partial t}+n_0\frac{\partial\upsilon}{\partial x}=0,$$

$$\left(\rho_{l0}+\rho_{g0}\right)\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\frac{\partial p_l}{\partial x}=0,\ \frac{\partial p_g}{\partial t}=-\frac{3\gamma p_{g0}}{a_0}\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{3(\gamma-1)}{4\pi a_0^3}q, \tag{1}$$

$$\rho_l=\rho_l^0\alpha_l,\rho_g=\rho_g^0\alpha_g,\alpha_l+\alpha_g=1,\alpha_g=\frac{4}{3}\pi n a^3.$$

Здесь нижние индексы $i = l$ и g относятся к параметрам жидкой и газовой фаз; ρ_i, ρ_i^0, υ_i, p, α_i, a, n – средняя по фазе и средняя по смеси плотности, скорость, давление, объемное содержание, радиус пузырьков, число пузырьков в единице объема смеси соответственно, q и γ – интенсивность теплообмена, отнесенная к единице площади поверхности, и показатель адиабаты газа.

Уравнения состояния дли жидкой и газовой фаз примем как

$$p_l=p_0+C_l^2\left(\rho_l^0-\rho_{l0}^0\right), p_g=R_g\rho_g^0 T_g, \tag{2}$$

где R_g – газовая постоянная, T_g и ρ_g^0 – распределение температуры и плотности в пузырьках. Дополнительный нижний индекс (0) относится к равновесному состоянию.

При описании динамики радиального движения пузырьков будем полагать, что радиальная скорость состоит из двух слагаемых

$$\frac{\partial a}{\partial t}=w,\ w=w^{(R)}+w^{(A)}.$$

Причем $w^{(R)}$ описывается уравнением Рэлея-Ламба

$$a_0\frac{\partial w^{(R)}}{\partial t}+\frac{3}{2}w^{(R)2}=\frac{p_g-p_l}{\rho_{l0}^0}. \tag{4}$$

Акустическая добавка $w^{(A)}$, которая находится из решения задачи о сферической разгрузки [1] на сфере, запишется как

$$w^{(A)}=\frac{p_g-p_l}{\rho_{l0}^0 C_l\alpha_{g0}^{1/3}}.$$

Для описания межфазного теплообмена необходимо добавить уравнение теплопроводности и граничные условия для газа в пузырьках

$$\rho_{g0}^{0} c_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_g r^2 \frac{\partial T_g}{\partial r}\right) + \frac{\partial p_g}{\partial t}, r < a_0,$$
$$T_g = T_0, r < a_0, \frac{\partial T_g}{\partial r} = 0, r = 0, q = -\lambda_g \left(\frac{\partial T_g}{\partial r}\right)_{a_0}, \tag{5}$$

где c_g – теплоемкость газовой фазы при постоянном давлении.

Решение вышеприведенной системы ищется в виде затухающей бегущей волны

$$(p, \upsilon, a, n) = A_{(p)}, A_{(\upsilon)}, A_{(a)} A_{(n)} \exp[i(Kx - \omega t)],\ \mathrm{T} = A_{(\mathrm{T})}(r)\exp[i(Kx - \omega t)],$$
$$\left(K = k + i\delta, C_p = \omega / k\right), \tag{6}$$

где ω – частота возмущений, K – волновой вектор, C_p и δ – фазовая скорость и коэффициент затухания. Из условия существования нетривиального решения вида (6) системы (1)–(5) следует дисперсионное уравнение

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{(1-\alpha_{g0})^2}{C_\ell^2} + \frac{1}{C_M^2 \psi}, \psi = \frac{1}{Q} - \frac{\omega^2}{\chi \omega^{(R)2}}, Q = 1 + 3(\gamma - 1)(z\,\mathrm{cth}z - 1)/z^2,$$
$$C_M = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_{\ell 0}^0 \alpha_{g0}(1-\alpha_{g0})}}, z = \sqrt{-i\omega a_0^2 / \nu_g^{(T)}}, \omega^{(R)} = a_0^{-1}\sqrt{3\gamma p_0 / \rho_{l0}^0}, \tag{7}$$
$$\nu_g^{(T)} = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_{g0}^0}, \chi = 1 - i\omega t_A, t_A = a_0 \alpha_{g0}^{-1/3} C_l^{-1}.$$

Запишем уравнение, которое следует из уравнений импульсов из (1) для решений вида (6)

$$A_{(\upsilon)} = \frac{K}{\omega}\frac{A_{(p)}}{\rho_{l0} + \rho_{g0}}. \tag{8}$$

Здесь $A_{(\upsilon)}$ и $A_{(p)}$– амплитуды для возмущения скорости и давления воды в пузырьковой жидкости.

Пусть на плоскую границу раздела между жидкостью и газонасыщенной жидкостью падает волна. Будем полагать, что, как и в случае обычных однофазных сред, отраженная от границы и преломленная волны представляют плоские гармонические волны [4]. Тогда, в зоне воды малые возмущения представляют сумму из двух гармонических волн, а в зоне пузырьковой жидкости – одну гармоническую волну. Возмущения, соответствующие падающей, отраженной и преломленной волнам, снабдим верхними значками (0), (r) и (s). Тогда условие неразрывности нормальных составляющих скоростей и давления на границе раздела можно записать как

$$p^{(0)} + p^{(r)} = p^{(s)},\ \upsilon_a^{(0)} \cos\theta^{(0)} - \upsilon_a^{(r)} \cos\theta^{(r)} = \upsilon_a^{(s)} \cos\theta^{(s)}. \tag{9}$$

Здесь $\theta^{(0)}$, $\theta^{(r)}$ и $\theta^{(s)}$ – соответственно углы падения, отражения и преломления. Ось x направим вертикально вверх в сторону воды, а ось y направим так, чтобы волновой вектор был параллелен координатной плоскости xoy. Тогда для падающей, отраженной и преломленной волн вида (6) при косом падении можем записать

$$p^{(0)} = A_p^{(0)} \exp\left[i\left(K^{(0)}\left(n_x^{(0)} x + n_y^{(0)} y \right) - \omega t \right) \right], p^{(r)} = A_p^{(r)} \exp\left[i\left(K^{(r)}\left(-n_x^{(r)} x + n_y^{(r)} y \right) - \omega t \right) \right],$$
$$p^{(s)} = A_p^{(s)} \exp\left[i\left(K^{(s)}\left(n_x^{(s)} x + n_y^{(s)} y \right) - \omega t \right) \right], (n_x^{(0)} = \cos\theta^{(0)}, n_y^{(0)} = \sin\theta^{(0)}, n_x^{(r)} = \cos\theta^{(r)}, \tag{10}$$
$$n_y^{(r)} = \sin\theta^{(r)}, n_x^{(s)} = \cos\theta^{(s)}, n_y^{(s)} = \sin\theta^{(s)})$$

Для волновых чисел $K^{(0)}$ и $K^{(r)}$ имеет место $K^{(0)} = K^{(r)} = \omega / C_l$.

Волновое число $K^{(s)}$ определяется из дисперсионного уравнения (7). Амплитуда возмущений скоростей с амплитудами давления связаны выражениями вида (8). Тогда имеет место

$$A_{(\upsilon)}^{(0)} = \frac{A_{(p)}^{(0)}}{\rho_{l0} C_l},\ A_{(\upsilon)}^{(r)} = -\frac{A_{(p)}^{(r)}}{\rho_{l0} C_l},\ A_{(\upsilon)}^{(s)} = \frac{K^{(s)}}{\omega} \frac{A_{(p)}^{(s)}}{\rho_{l0} + \rho_{g0}}. \tag{11}$$

На основе условий (9) для решений вида (10) с учетом (11) при $x = 0$ получим

$$A_{(p)}^{(0)} \exp\left(iK^{(0)} n_y^{(0)} y \right) + A_{(p)}^{(r)} \exp\left(iK^{(r)} n_y^{(r)} y \right) = A_{(p)}^{(s)} \exp\left(iK^{(s)} n_y^{(s)} y \right),$$
$$A_{(p)}^{(0)} \cos\theta^{(0)} \exp\left(iK^{(0)} n_y^{(0)} y \right) - A_{(p)}^{(r)} \cos\theta^{(r)} \exp\left(iK^{(r)} n_y^{(r)} y \right) = \tag{12}$$
$$= A_{(p)}^{(s)} \cos\theta^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\omega} \frac{\rho_l^0 C_a}{\rho_{l0} + \rho_{g0}} \exp\left(iK^{(s)} n_y^{(s)} y \right).$$

Чтобы эти уравнения выполнялись для любых значений y, должны выполняться равенства

$$K^{(0)} n_y^{(0)} = K^{(r)} n_y^{(r)} = K^{(s)} n_y^{(s)}. \tag{13}$$

Отсюда имеем

$$\sin\theta^{(0)}=\sin\theta^{(r)},\sin\theta^{(0)}=\left(K^{(s)}/\omega\right)C_l\sin\theta^{(s)}. \qquad (14)$$

Поскольку волновое число $K^{(s)}$ – комплексное, то, как это следует из второго равенства (14), угол преломления также имеет мнимую часть.

В том случае, когда волна падает со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела, вместо второго равенства (14) получим

$$\sin\theta^{(0)}=\left(\omega/K^{(s)}C_l\right)\sin\theta^{(s)}. \qquad (15)$$

В качестве примера пузырьковой жидкости рассмотрим смесь воды с воздушными включениями. В численных расчетах использовались следующие значения теплофизических [5] параметров при p_0=0.1 МПа, T_0=300 К: для воды– C_l=1500 м/с, $\rho_{l0}{}^0$=1000 кг/м^3; для воздуха – $\rho_{g0}{}^0$=1.3 кг/м^3, c_g=1006 Дж/(кг·К), λ_g=0.026 Вт/(м·К). Для значения радиуса пузырьков приняли следующее значение $a_0=5\cdot10^{-4}$ м. Сплошные и пунктирные линии здесь и в дальнейшем соответствуют значениям объемного содержания газовой фазы $\alpha_{g0}=10^{-3}$ и 10^{-2}. Расчеты проводились в математическом пакете Mathcad 14, построение рисунков выполнено в графопостроителе OriginLab 8.1.

На рис.1 представлены зависимости угла преломления от угла падения волны со стороны воды (а) и со стороны пузырьковой жидкости (б) на границу раздела «вода – пузырьковая вода». Линии *1* и *2* здесь соответствуют величинам характерных частот $\omega=10^3$, когда выполняется условие $\omega\le\omega^{(R)}$, и 10^6 с$^{-1}$, когда выполняется $\omega\ge\omega^{(C)}\left(\omega^{(C)}=\omega^{(R)}\sqrt{1+\rho_{l0}^0\alpha_{g0}C_l^2/\gamma p_0}\right)$. Согласно второй формуле из (14) угол преломления $\theta^{(s)}$ является комплексным числом, поскольку волновое число $K^{(s)}$ для пузырьковой системы комплексное. При этом действительная часть будет иметь обычный геометрический смысл. Поэтому, в дальнейшем под углом преломления будем понимать действительную часть $\theta^{(s)}$. Из фрагмента (а) видно, что угол преломления на всем диапазоне изменения угла падения ($0\le\theta^{(0)}\le\pi/2$) меньше прямого угла ($\theta^{(s)}<\pi/2$).

Следовательно, при любом угле падения, акустическая волна всегда проникает из чистой жидкости в пузырьковую смесь.

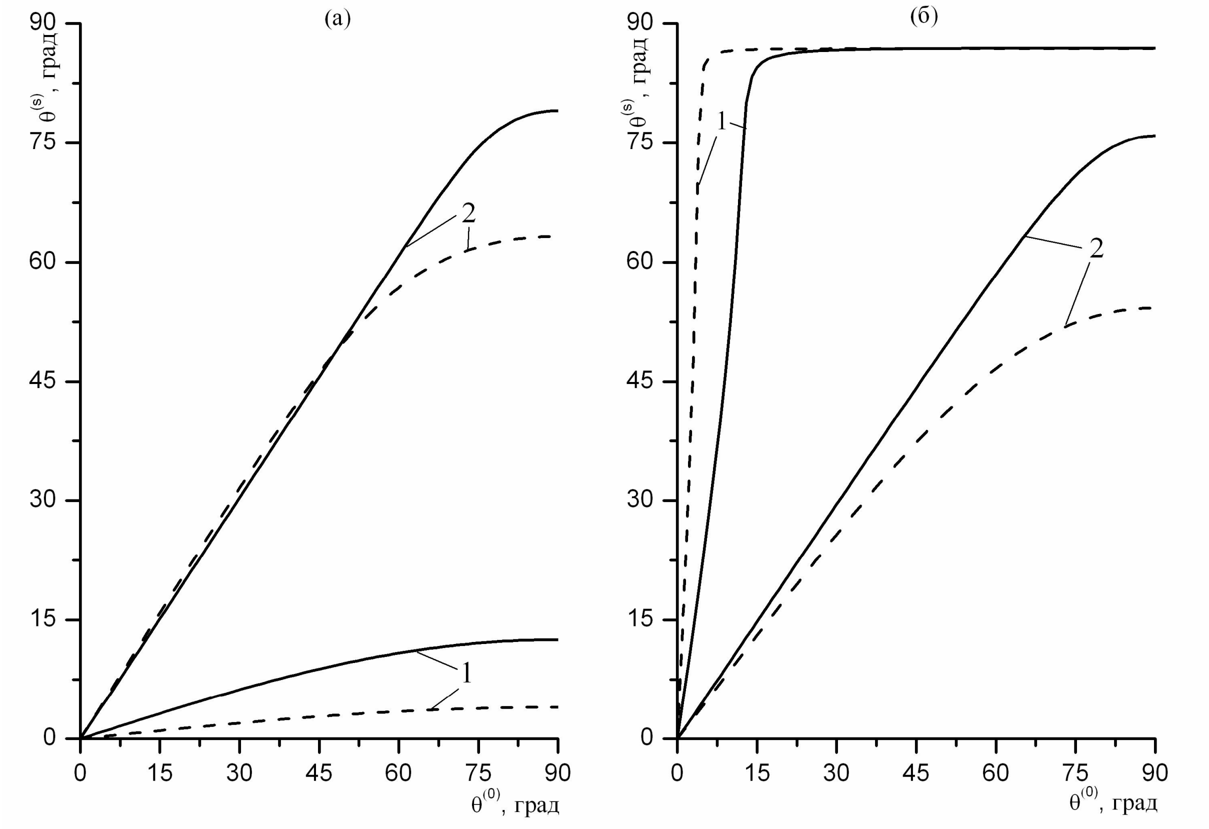

Рис.1. Угол преломления при падении волны со стороны воды(а) и со стороны пузырьковой жидкости(б) в зависимости от угла падения.

Иная картина реализуется для случая, когда падающая волна идет со стороны дисперсной смеси (б). Видно, что для частоты $\omega = 10^3$ с$^{-1}$ при углах падения $\theta_*^{(0)} \geq 15°$ и $\theta_*^{(0)} \geq 5°$, для $\alpha_{g0}=10^{-3}$ и 10^{-2} соответственно, угол преломления начинает “прижиматься” к значению $\theta^{(s)} \approx 90°$. Таким образом, в этом случае, будет реализовываться полное внутреннее отражение [4]. Для высоких частот $\left(\omega \geq \omega^{(C)}\right)$ такая особенность, связанная с полным внутренним отражением, исчезает.

На рис.2 представлена зависимость критического угла $\theta_*^{(0)}$ от объемного содержания газовых пузырьков в дисперсной системе. Здесь сплошная и пунктирная линии соответствуют значениям частот $\omega = 10^3$ и 10^2 с$^{-1}$.

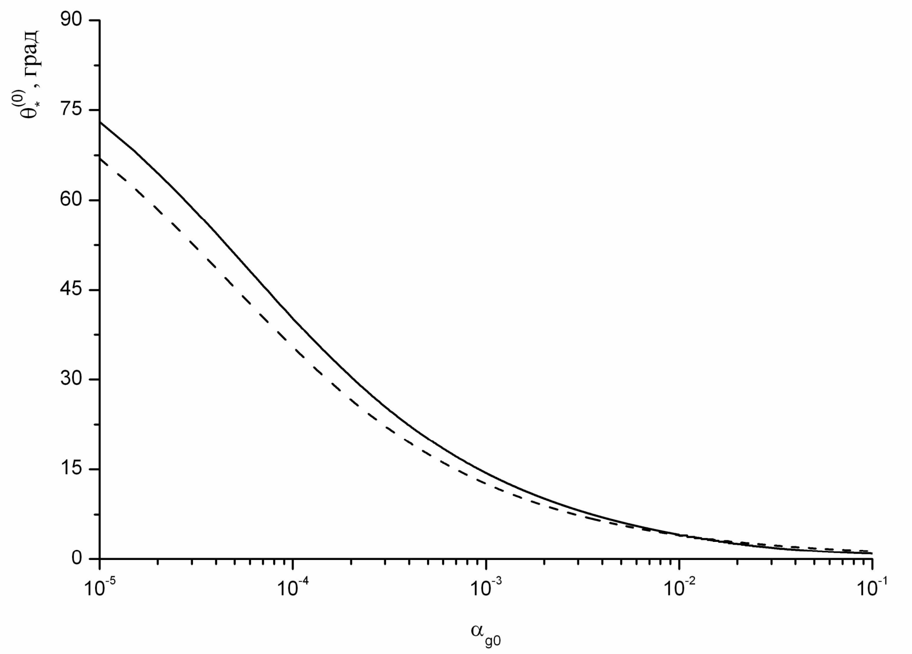

Рис.2. Зависимость критического угла падения от объемного содержания газовых включений.

Таким образом, при падении волны со стороны воды на границу раздела она всегда проходит через неё и, следовательно, проникает в дисперсную систему. В случае, когда волна падает со стороны пузырьковой среды на границу раздела, то для низких частот ($\omega \leq \omega^{(R)}$) существует критический угол, зависящий от параметров смеси, при углах больше которого волна полностью отражается от границы раздела.

Литература

1. *Shagapov V. Sh., Gimaltdinov I.K., Khabeev N.S., Bailey S.S.* Acoustic waves in a liquid with a bubble screen // Shock Waves. 2003. V.13. № 1. P. 49–56.
2. *Karpov S.*, *Prosperetti A.*, *Ostrovsky L.* Nonlinear wave interactions in bubble layers // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113 (3). P. 1304–1316.
3. *Baranowska A.* Theoretical Studies of Nonlinear Generation Efficiency in a Bubble Layer // Archives of acoustics. 2012. V. 37. P. 287–294.
4. *Лепендин Л.Ф.* Акустика. М.: Высшая школа, 1978.
5. *Варгафтик Н.Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972.